確定特異点型ホロノミック系の零次元代数的局所コホモロジ-解 (双曲形方程式と非正則度)

田島, 慎一

数理解析研究所講究録 1336 巻 2003 年 121-132

確定特異点型ホロノミック系の零次元代数的局所コホモロジー解

新潟大学工学部情報工学科 (Niigata Univ)
田島慎一 (Shinichi Tajima) *

1 Noether 作用素と零次元代数的局所コホモロジー解

$X=\mathbf{C}^n$ とおき, 座標系 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ を固定する. 有理数体を $K=\mathbb{Q}$ であらわす. 有理数係数多項式を係数に持つ Weyl 代数 $K[x,\frac{\partial}{\partial x}]$ を D_X とおく. X 上のホロノミックな D_X-加群 $M=D_X/J$ に対し,

$$I=\{f\in K[x]\mid f\in J\}$$

とおくと I は多項式環 $K[x]$ のイデアルを定める. このイデアルの準素イデアル分解をとり

$$I=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_\lambda\cap\cdots\cap I_l$$

とする. いま, さらに, イデアル I_λ の零点集合 $Z_\lambda=V(I_\lambda)\subset X$ は零次元集合であると仮定する.

まず, この様な条件を満たすホロノミック系 M に対し, 零次元多様体 Z_λ に関する Noether 作用素の概念を導入する.

記号を簡単にするため, I 自身が準素イデアルであると仮定し議論をすすめる. (一般化する際は, イデアル I を I_λ に置き換え, 対応する零点集合 Z を Z_λ に置き換えていけばよい.) イデアル I の根基 $\sqrt{I}$ をとり, $\sqrt{I}$ で生成される左 D_X-イデアルを $D_X\sqrt{I}$ とおく. 更に, Z に台をもつホロノミックな D_X-加群 $M_{\sqrt{I}}$ を $M_{\sqrt{I}}=D_X/D_X\sqrt{I}$ で定める.

Definition 1.1 有限次元 K ベクトル空間 $Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}})$ をホロノミック系 M の Z に関する *Noether* 空間と呼ぶ.

Tsai と Walther の最近の結果 [11] を使うと, Weyl 代数上の一般のホロノミック系の間の D_X-準同型写像がアルゴリスミックに計算できる. 特に, Noether 空間を計算することができることになる. 本稿では彼らとは別の観点から, Noether 空間について考察していく.

*tajima@ie.niigata-u.ac.jp

まず, $\tau \in Hom_{D_X}(D_X,\ D_X)$ に対し, $T = \tau(1) \in D_X$ とおく. このとき, 準同型写像 τ が, (分解 $0 \leftarrow M \leftarrow D_X \leftarrow J,\ 0 \leftarrow M_{\sqrt{I}} \leftarrow D_X \leftarrow D_X\sqrt{I}$ により) Noether 空間 $Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}})$ の要素を定める条件は,

$$PT \in D_X\sqrt{I}, \quad \forall P \in J$$

で与えられることを注意しておく.

Noether 空間 $Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}})$ の要素 τ と $b(x) \in K[x]/\sqrt{I}$ に対し, τb を

$$(\tau b)m = \tau(m)b, \quad m \in M$$

で定めると, $\tau b \in Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}})$ が成立する. 従って, $Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}})$ は右 $K[x]/\sqrt{I}$ 加群の構造を持つ.

Theorem 1.1 *Noether* 空間 $Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}})$ の部分集合 $\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}\}$ であり次の条件 (N) を満たすものが存在する.

$$(N) \quad \forall\tau \in Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}}),\ \exists!\ c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \in K[x]/\sqrt{I}\ s.t.\ \tau = \sum \tau_j c_j$$

条件 (N) を満たす集合 $\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}\}$ をホロノミック系 M の Z に関する Noether 基底と呼ぶことにする.

X 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$ で表し, Z に台を持つような代数的局所コホモロジー群 $H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$ をとる. いま, 根基 $\sqrt{I}$ を生成する n 個の多項式 $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ を用いて, 自然な写像

$$Ext^n_{K[x]}(K[x]/\sqrt{I},\ K[x]) \longrightarrow H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$$

による Grothendieck symbol

$$\left[\begin{array}{c} \det(\frac{\partial(p_1,p_2,\ldots,p_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}) \\ p_1\ p_2\ \cdots\ p_n \end{array}\right] \in Ext^n_{K[x]}(K[x]/\sqrt{I},\ K[x])$$

の像を

$$\delta_Z = \left[\frac{\det(\frac{\partial(p_1,p_2,\ldots,p_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)})}{p_1\ p_2\ \cdots\ p_n}\right]$$

で表すことにする.

ホロノミック系 M の代数的局所コホモロジー解に関し, 次の結果を得る.

Theorem 1.2 D_X-加群 M は零次元多様体 Z を台に含むようなホロノミック系であるとし, 集合 $\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}\} \subset Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}})$ は ホロノミック系 $M = D_X/J$ の Z に関する *Noether* 基底であるとする. 各 $\tau_i(1) = \tau_i(1\ mod\ J) \in M_{\sqrt{I}}$ に対しその D_X における代表元を選び, $T_i \in D_X$ とおく. $\{b_0, \ldots, b_{l-1}\}$ は剰余 $K[x]/\sqrt{I}$ のベクトル空間としての基底とする. このとき, 次が成り立つ.

$$Hom_{D_X}(M,\ H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)) \cong \mathrm{Span}_{\mathbf{C}}\{T_i b_j \delta_Z, i = 0, 1, \ldots, m-1,\ j = 0, 1, \ldots, l-1\}$$

証明　まず, 次の自然な写像を思い出す.

$Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}}) \times Hom_{D_X}(M_{\sqrt{I}},\ H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)) \longrightarrow Hom_{D_X}(M,\ H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X))$

ここで,

$$Hom_{D_X}(M_{\sqrt{I}},\ H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)) \cong \mathrm{Span}_{\mathbf{C}}\{b_j\delta_Z,\ j=0,1,...,l-1\}$$

が成り立つことに注目すれば,

$Hom_{D_X}(M,\ H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)) \cong \mathrm{Span}_{\mathbf{C}}\{T_ib_j\delta_Z, i=0,1,...,m-1,\ j=0,1,...,l-1\}$

を直ちに得る.

定理の中で導入した偏微分作用素 T_i を Noether 作用素と呼び, これら Noether 作用素からなる組 $\{T_0, T_1, ..., T_{l-1}\}$ を Noether 作用素基底と呼ぶことにする.

次の例は論文 [8] で扱った常微分方程式系である. 混乱を招かないように, 記号等は本稿での流儀に合わせてある.

Example 1 $X=\mathbf{C}, q(x)=x^3+3x+1\in K[x]$ とし, $Z=\{x\in X \mid q(x)=0\}$ とおく. この零点集合 Z に台を持つような X 上の常微分方程式系 $M=D_X/J$ を $J=D_Xq(x)^3+D_XP$ により定義する. ただし, P は

$$P=75(x^3+3x+1)\frac{d}{dx}$$

$$-59x^8+72x^7-477x^6-1035x^4+273x^3+256x^2-306x+642$$

なる常微分作用素である. 多項式環 $K[x]$ でのイデアル I として $I=< q(x)^3 >$ をとる. ベクトル空間 $Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}})$ は 3 次元ベクトル空間である. ここで

$$T=(-\frac{d}{dx})^2+2x+5$$

とおけば, $\{T\}$ がホロノミック系 M の *Noether* 作用素基底を与える. いま, Z に台を持つ代数的局所コホモロジー類 δ_Z を $\delta_Z=[\frac{3x^2+3}{x^3+3x+1}]$ で定める. $K[x]/< q(x) >\cong \mathrm{Span}\{1,x,x^2\}$ であるので, 常微分方程式系 M の代数的局所コホモロジー解のなす空間は

$$Hom_{D_X}(M,\ H^1_{[Z]}(\mathcal{O}_X)) \cong \mathrm{Span}_{\mathbf{C}}\{T\delta_Z,\ Tx\delta_Z,\ Tx^2\delta_Z\}$$

で与えられる.

Example 2 $f(x,y)=(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3,\ g(x,y)=(x^2+y^2-1)^2$ とし, イデアル $I\subset K[x,y]$ を $I=< f,g >$ で定める. イデアル I の零点集合を $Z\subset X=\mathbf{C}^2$ であらわす. Z に台をもつ代数的局所コホモロジー類 σ_F を

$$\sigma_F=[\frac{1}{fg}]\in H^2_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$$

で定める．この代数的局所コホモロジー類 σ_F を *annihilate* するような偏微分作用素すべてのなす左 D_X-イデアルを J であらわす．

$$J = \{P \in D_X \mid P\sigma_F = 0\}.$$

イデアル J の生成元を求めるため，まず多項式環 $K[x,y]$ に辞書式項順序 $x \succ y$ をいれ，イデアル I の *Gröbner* 基底を計算すると

$$\{-5x^2+144y^5-96y^4-152y^3+31y^2+57y+16, 16y^6-24y^4-8y^3+9y^2+6y+1\}$$

を得る．次に，代数的局所コホモロジー類 σ_F の *annihilators* を計算することで一階の偏微分作用素

$$P = (-1488y^5+912y^4+1684y^3-302y^2-659y-147)\frac{\partial}{\partial x}$$

$$+(20xy^2-10xy-10x)\frac{\partial}{\partial y}+120xy-60x$$

を得る，$J = D_X I + D_X P$ が成り立つことが確かめられる．D_X 加群 $M = D_X/J$ は Z に台を持つホロノミック系となる．台 Z は 3 点からなるので，代数的局所コホモロジー解の空間

$$Hom_{D_X}(M,\ H^2_{[Z]}(\mathcal{O}_X))$$

は 3 次元ベクトル空間をなす．

(a) まず，*Noether* 作用素を用いないで代数的局所コホモロジー解を求めてみる．先ほどと同じ項順序のもとで，$h(x,y) \in K[x,y]/I$ を未知量としてとり，微分方程式 $P(h\sigma_F) = 0$ を解くことで，

$$Hom_{D_X}(M,\ H^2_{[Z]}(\mathcal{O}_X))$$

$$\cong \mathrm{Span}_C\{(xy^5-\frac{2}{3}xy^4-\frac{289}{264}xy^3+\frac{1}{4}xy^2+\frac{119}{264}xy+\frac{2}{33}x)\sigma_F,$$

$$(y^5+\frac{5}{8}y^4-\frac{5}{4}y^3-\frac{25}{16}y^2-\frac{5}{8}y)\sigma_F, \sigma_F\}$$

を得る．

(b) *Noether* 作用素を計算することで，代数的局所コホモロジー解を求めてみる．まず，イデアル $I = I_1 \cap I_2$ の準素イデアル分解を求める．全次数辞書式項順序 $(y \succ x)$ に関する *Gröbner* 基底を用いて $I_1 =< y^2-2y+1, 5x^2+y-1 >$, $I_2 =< 80x^2y+53x^2+89y^2+16y-24, x^2-80y^3-107y^2-48y-8, 80x^4-94x^2+258y^2+232y+77 >$ と表せる．根基は

$$\sqrt{I_1} =< x, y-1 >,\ \sqrt{I_2} =< 4x^2-3, 2y+1 >$$

左 D_X イデアル J_1, J_2 を $J_1 = D_X I_1 + D_X P, J_2 = D_X I_2 + D_X P$ で定め, $M_1 = D_X/J_1, M_2 = D_X/J_2$ とおくと明らかに, $M = M_1 \oplus M_2$ が成立する. ホロノミック系 M_1, M_2 の台はそれぞれ, $Z_1 = V(I_1), Z_2 = V(I_2)$ と一致する.

$$Hom_{D_X}(M, M_{\sqrt{I_1}}) = Hom_{D_X}(M_1, M_{\sqrt{I_1}})$$

に注意してホロノミック系 M の Z_1 に関する *Noether* 作用素基底を求めると

$$T_{Z_1} = (-\frac{\partial}{\partial x})^3 + (-\frac{\partial}{\partial x})(-\frac{\partial}{\partial y})(-30) + (-\frac{\partial}{\partial x})(62)$$

を得る. 同様に, M の Z_2 に関する *Noether* 作用素基底を求めると

$$T_{Z_2} = (-\frac{\partial}{\partial x})^3 + (-\frac{\partial}{\partial x})^2(-\frac{\partial}{\partial y})6x + (-\frac{\partial}{\partial x})(-\frac{\partial}{\partial y})^2 9 + (-\frac{\partial}{\partial y})^3 6x$$

$$(-\frac{\partial}{\partial x})^2(-120x) + (-\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial y})(-120) + (-\frac{\partial}{\partial y})^2 120x$$

$$+(-\frac{\partial}{\partial x})248 + (-\frac{\partial}{\partial y})496x$$

を得る. $K[x,y]/\sqrt{I_2} \cong \mathrm{Span}\{1, x\}$ であるので,

$$Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I_2}}) \cong \mathrm{Span}\{T_{Z_2}, T_{Z_2}x\}$$

が成り立つ. いま, Z_1, Z_2 に台をもつデルタ関数を

$$\delta_{Z_1} = [\frac{1}{x(y-1)}],\ \delta_{Z_2} = [\frac{16x}{(4x^2-3)(2y+1)}]$$

で定めると, 代数的局所コホモロジー類 σ_F は

$$\sigma_F = T_{Z_1}(-\frac{1}{486})\delta_{Z_1} + T_{Z_2}(\frac{1}{3888})\delta_{Z_2}$$

と表現される.

この表示を用いると, 代数的局所コホモロジー類 σ_F を複素領域上の超関数とみなしたときの, その線形汎関数としての作用が直ちに読み取れる.

2 零次元イデアルと Noether 作用素

この節では, 簡単のため, ホロノミック系 M として以下の 2 つの条件を満たすものを考える.

(i) 零次元イデアル $I \subset K[x]$ であり, $I \subset J$ を満たすものが存在する.

(ii) ホロノミック系 M の台 Z は既約であり, $V(I)$ と一致する.

Lemma 2.1 ホロノミック系 M_I を $M_I = D_X/D_X I$ で定める. この時,

$$Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}}) \subset Hom_{D_X}(M_I,\ M_{\sqrt{I}})$$

が成り立つ.

証明　D_X-加群としての全射 $M_I \to M \to 0$ が存在するので, 自然な単射

$$0 \longrightarrow Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}}) \longrightarrow Hom_{D_X}(M_I,\ M_{\sqrt{I}})$$

が存在する.

Theorem 2.1 集合 $\{\tau_0, \tau_1, ..., \tau_{m-1}\} \subset Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}})$ は (条件 (N) を満たす) ホロノミック系 M の *Noether* 基底であるとする. 集合 $\{\rho_0, \rho_1, ..., \rho_{\mu-1}\}$ はホロノミック系 M_I の *Noether* 基底であるとする. このとき, τ_j に対し

$$\tau_j = \sum \rho_k c_{j,k}$$

を満たす $c_{j,k} \in K[x]/\sqrt{I}$ が存在する.

ホロノミック系 M の Noether 基底は, ホロノミック系 M_I の Noether 基底を用いて表現できることになる.

前の節で取り上げた例 (Example 2) の場合を再び考える

Example 3 イデアル $I_1 =< y^2 - 2y + 1, 5x^2 + y - 1 >$, $I_2 =< 80x^2y + 53x^2 + 89y^2 + 16y - 24, x^2 - 80y^3 - 107y^2 - 48y - 8, 80x^4 - 94x^2 + 258y^2 + 232y + 77 >$ の根基は, それぞれ

$$\sqrt{I_1} =< x, y - 1 >,\ \sqrt{I_2} =< 4x^2 - 3, 2y + 1 >$$

で与えられる. 論文 [*10*] の方法でイデアル I_1, I_2 に対する *Noether* 空間

$$Hom_{D_X}(M_{I_1}, M_{\sqrt{I_1}}),\ Hom_{D_X}(M_{I_2}, M_{\sqrt{I_2}})$$

の *Noether* 作用素基底を求めると

$$\{R_{Z_1,0} = 1, R_{Z_1,1} = (-\frac{\partial}{\partial x}), R_{Z_1,2} = (-\frac{\partial}{\partial x})^2 + (-\frac{\partial}{\partial y}(-10),$$

$$R_{Z_1,3} = (-\frac{\partial}{\partial x})^3 + (-\frac{\partial}{\partial y})(-30)\}$$

と

$$\{R_{Z_2,0} = 1, R_{Z_2,1} = (-\frac{\partial}{\partial x}) + (-\frac{\partial}{\partial y})2x,$$

$$R_{Z_2,2} = (-\frac{\partial}{\partial x})^2 + (-\frac{\partial}{\partial x})(-\frac{\partial}{\partial y})4x + (-\frac{\partial}{\partial y})^2 3 + (-\frac{\partial}{\partial y})80,$$

$$R_{Z_2,3} = (-\frac{\partial}{\partial x})^3 + (-\frac{\partial}{\partial x})^2(-\frac{\partial}{\partial y})6x + (-\frac{\partial}{\partial x})(-\frac{\partial}{\partial x})^2 9 + (-\frac{\partial}{\partial y})^3 6x$$
$$+(-\frac{\partial}{\partial x})(-\frac{\partial}{\partial y})240 + (-\frac{\partial}{\partial y})^2 480x + (-\frac{\partial}{\partial y})9600x\}$$

を得る.

Example 2 で扱ったホロノミック系 $M_1 = D_X/J_1$, $M_2 = D_X/J_2$ は, イデアル I の準素イデアル分解 $I = I_1 \cap I_2$ に応じて構成されたものであるので, 明らかに条件 $I_1 \subset J_1$, $I_2 \subset J_2$ を満たす. 従って

$$Hom_{D_X}(M_1,\ M_{\sqrt{I_1}}) \subset Hom_{D_X}(M_{I_1},\ M_{\sqrt{I_1}}),$$
$$Hom_{D_X}(M_2,\ M_{\sqrt{I_2}}) \subset Hom_{D_X}(M_{I_2},\ M_{\sqrt{I_2}})$$

が成り立つ. 特に, ホロノミック系 M の *Noether* 作用素基底 T_{Z_1}, T_{Z_2} はそれぞれ, $R_{Z_1,0}, R_{Z_1,1}, R_{Z_1,2}, R_{Z_1,3}$ と $R_{Z_2,0}, R_{Z_2,1}, R_{Z_2,2}, R_{Z_2,3}$ を用いて表現できることになる.

実際,

$$T_{Z_1} = R_{Z_1,3}(-\frac{1}{486}) - R_{Z_1,1}(\frac{31}{243}),$$
$$T_{Z_2} = R_{Z_2,3} + R_{Z_2,2}(-120x) + R_{Z_2,1}(248)$$

と表すことが出来る.

3 Shape 基底と柏原の定理

多くの零次元イデアルは, 適当な線形変換を施すことにより shape 基底と呼ばれる次のような形の多項式の組を生成元として持つことが知られている.

$$\{x_1 - g_1(x_n), x_2 - g_2(x_n), ..., g_n(x_n)\}.$$

この節では, 零次元多様体に台を持つようなホロノミック系と shape 基底との関係を調べる. 対象とするホロノミック系 $M = D_X/J$ は以下の条件

(i) 零次元イデアル $I \subset K[x]$ であり, $I \subset J$ を満たすものが存在する.

(ii) ホロノミック系 M の台 Z は既約であり, $V(I)$ と一致する.

(iii) イデアル I は shape 基底 $\{x_1 - g_1(x_n), ..., g_n(x_n)\}$ をもつ.

を満たすとする.

まず, $Y = \{y \mid y \in \mathbf{C}\}$ から X への埋め込み $i : Y \longrightarrow X$ を

$$i(y) = (x_1 - g_1(y), ..., x_{n-1} - g_{n-1}(y), g_n(y))$$

で定める. 一変数多項式環 $K[y]$ のイデアル G を $G = < g_n(y) >$ で定める. この時, $G \subset K$ なる D_Y イデアル K から定まる Y 上のホロノミック系 $N = D_Y/K$ であり, $M = \int_i N$ を満たすものが存在する.

さてここで，ホロノミック系の組 $N, M_{\sqrt{I}}$ に対し，柏原の双対定理を適用すると

$$Hom_{D_X}(\int_i N,\ M_{\sqrt{I}}) = i_* Hom_{D_Y}(N,\ i^* M_{\sqrt{I}})$$

を得る．ここで，$i^* M_{\sqrt{I}} = M_{\sqrt{G}}$ に注意すれば，

$$Hom_{D_X}(\int_i N,\ M_{\sqrt{I}}) = i_* Hom_{D_Y}(N,\ M_{\sqrt{G}})$$

すなわち，

$$Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}}) = i_* Hom_{D_Y}(N,\ i^* M_{\sqrt{I}})$$

を得る．

ここで，微分作用素 $-\frac{d}{dy}$ に対して偏微分作用素，

$$V = \sum_{k=1}^{n}(-\frac{\partial}{\partial x_k})\frac{\partial g_k}{\partial x_n} + (-\frac{\partial}{\partial x_n})$$

が対応することに注意すれば，ホロノミック系 $M = \int_i N$ の Noether 作用素は N の Noether 作用素を計算することで求まることがわかる．

以下，零点集合が原点のみからなるような簡単な例で計算を行い上記のことを確かめておく．

Example 4 $X = \mathbf{C}^2$ とし，多項式 $f_1,\ f_2 \in K[x,y]$ を $f_1(x,y) = x^3, f_2(x,y) = y^2 + 2x^2 + 3x$ できめる．f_1, f_2 の生成するイデアル $I = < f_1, f_2 >$ は *shape* 基底 $\{27x + 9y^2 + 2y^4,\ y^6 >$ を持つ．そこで，$Y = \mathbf{C}$ から X への埋め込み $i : Y \longrightarrow X$ を

$$x = -\frac{1}{27}(9y^2 + 2y^4), y = y$$

で決める．

正規列 x^3, y^2+2x^2+3x と正規列 $27x+9y^2+2y^4, y^6$ を用いて，原点 $Z = (0,0)$ に台を持つ代数的局所コホモロジー類 σ と τ を，次のように定める．

$$\sigma = [\frac{1}{x^3(y^2 + 2x^2 + 3x)}],\ \tau = [\frac{1}{(27x + 9y^2 + 2y^4)y^6}]$$

両者とも，イデアル I により *annihilate* されるので，この節での条件 $(i), (ii)$ をみたすようなホロノミック系を定める．まず，τ の方に注目しよう．

(a) イデアル $D_Y y^6 + D_Y(y\frac{d}{dy} + 6)$ が定める D_Y 加群を N とおく．微分方程式系の順像（埋め込み写像 i に沿った積分）を計算すると，ホロノミックな D_X 加群

$$D_X/D_X(27x + 9y^2 + 2y^4) + D_X y^6 + D_X((-4x^2 + 6x)\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} - 8x + 24$$

を得る．これは代数的局所コホモロジー類 τ のみたすホロノミック系に他ならない．いま，一変数多項式環 $K[y]$ のイデアル G を $G=<y^6>$ で定めれば，$\sqrt{G}=<y>$ であり $Hom_{D_Y}(N,\ M_{\sqrt{G}})$ は $(-\frac{d}{dy})^5$ で張られる一次元ベクトル空間となる．この作用素の順像を取ることで τ の *Noether* 作用素表示が求まる．原点でのローラン展開（正確には原点に台を持つような局所コホモロジーに対応する相対コホモロジーで，標準的な *relative Cech covering* を用いた表現）は

$$\tau=[\frac{1}{xy^6}]-\frac{1}{3}[\frac{1}{x^2y^4}]+\frac{1}{9}[\frac{1}{x^3y^2}]-\frac{2}{27}[\frac{1}{x^2y^2}]$$

で与えられる．

(*b*) Y 上の代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{y^2}]$ と $[\frac{1}{y^6}]$ を共に同次解として持つような常微分方程式系を考えてみる．イデアル

$$D_Yy^6+D_Y(y^2(y\frac{d}{dy}+6)+D_Y(y^2\frac{d^2}{dy^2}+9y\frac{d}{dy}+12)$$

をとり，対応するホロノミック D_Y 加群を N としよう．先ほどと同様の計算をすると，方程式系 N の順像は次の作用素が生成するイデアルにより定まるホロノミック系であることがわかる．

$$27x+9y^2+2y^4,\ y^6,\ 2y^4\frac{\partial}{\partial x}-3y^3\frac{\partial}{\partial y}-18y^2$$

$$2y^3\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}-3y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+8y^2\frac{\partial}{\partial x}-27y\frac{\partial}{\partial y}-36$$

これは，代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{xy^2}]$ と τ が満たすホロノミック系と一致する．この場合 $Hom_{D_Y}(N,\ M_{\sqrt{G}})$ は $(-\frac{d}{dy}),(-\frac{d}{dy})^5$ が張る 2 次元ベクトル空間である．

(*c*) 代数的局所コホモロジー類 σ は次のホロノミック系を満たす．

$$x^3\sigma=0,(y^2+2x^2+3x)\sigma=0,((-4x^2+6x)\frac{\partial}{\partial x}+3y\frac{\partial}{\partial y}-12x+24)\sigma=0.$$

Y 上の常微分方程式系 N を

$$N=D_Y/D_Y(y^6)+D_Y(y\frac{d}{dy}+6+\frac{4}{9}y^2+\frac{8}{81}y^4)$$

で定めれば，このホロノミック系 N の順像が σ が定めた上記のホロノミック系と一致する．常微分方程式系 N の代数的局所コホモロジー解 $[\frac{9-2y^2}{y^6}]$ の順像をとると代数的局所コホモロジー類 σ となる．

代数的局所コホモロジー類 $[\frac{9-2y^2}{y^6}]$ の *Noether* 作用素表示

$$[\frac{9-2y^2}{y^6}] = (\frac{3}{40}(-\frac{d}{dy})^5 - \frac{1}{3}(-\frac{d}{dy})^3)[\frac{1}{y}]$$

の順像をとると代数的局所コホモロジー類 σ の *Noether* 作用素表示となる．実際に計算することで σ のローラン展開

$$\sigma = [\frac{1}{x^3y^2}] - 3[\frac{1}{x^2y^4}] + 9[\frac{1}{xy^6}] - 2[\frac{1}{xy^4}]$$

を得る．

(*d*) Y 上の常微分方程式系で，代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{y}]$ と $[\frac{9-2y^2}{y^6}]$ を同次解に持つものは，

$$N = D_Y/D_Y y^6 + D_Y(y(y\frac{d}{dy} + 6 + \frac{4}{9}y^2 + \frac{8}{81}y^4))$$

で与えられる．このホロノミック系の順像を求め

$$D_X/D_X x^3 + D_X(y^2 + 2x^2 + 3x) + D_X((8x^2y - 6xy)\frac{\partial}{\partial x} + 9x\frac{\partial}{\partial y} - 18y + 24xy)$$

をえる．このホロノミック系は，代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{xy}]$ と σ を同次解に持つホロノミック系である．

柏原の双対定理は functorial なので，この例で見たように様々な計算が可能となる．

4 計算例

$X = \mathbf{C}^2, f(x,y) = xy - 1, g(x,y) = (4x^2 + 9y^2 - 36)^2 \in K[x,y]$ とする．正規列 $\{f,g\}$ が定める代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{fg}]$ をとる．本稿で今まで述べたことを用いて，この代数的局所コホモロジー類の Noether 作用素表示を求めてみよう．

(*i*) イデアル I を $I = < f(x,y), g(x,y) >$ で定め，根基を $\sqrt{I}$ とおく．全次数辞書式 $(x \succ y)$ 項順序での Gröbner 基底を求めると，それぞれ

$$\{16x^5 + 81y^3 - 288x^3 - 648y + 1368x, 81y^4 + 16x^4 - 648y^2 - 288x^2 + 1368, xy - 1\}$$

$$\{4x^3 - 9y + 36x, 9y^2 + 4x^2 - 36, xy - 1\}$$

となる. 対応する零点集合 $Z = V(I)$ は 4 点からなる. イデアル I の Noether 空間 $Hom_{D_X}(M_I, M_{\sqrt{I}})$ は 8 次元の K ベクトル空間となるが, Z の各点での重複度は 2 であるので, Noether 基底は 2 個の要素からなる. 剰余空間 $K[x,y]/\sqrt{I}$ を $\mathrm{Span}_K\{1, x, y, x^2\}$ と同一視する. 偏微分作用素 R_0, R_1 を

$$R_0 = 1, R_1 = (-\frac{\partial}{\partial x}) + (-\frac{\partial}{\partial y})(-4 + \frac{4}{9}x^2)$$

で定める. このとき, $\{R_0, R_1\}$ はイデアル I の Noether 基底となる.

(ii) 代数的局所コホモロジー類 $\sigma_F \in H^2_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$ を $\sigma_F = [\frac{1}{fg}]$ で定める. σ_F の annihilators のなすイデアルをとり $J = \{P \in D_X \mid P\sigma_F = 0\}$ とおく. いま, 一階の偏微分作用素 P を

$$P = (4x^4 - 36x^2 + 9)\frac{\partial}{\partial x} + (-4x^2 - 9y^2 + 36)\frac{\partial}{\partial y} + 20x^3 - 36x - 45y$$

で定めると, $J = D_X I + D_X P$ が成り立つことがわかる. イデアル J が定めるホロノミック系 $M = D_X/J$ は Z に台を持ち, Z の 4 点でそれぞれ simple なホロノミック系となる. 従って, Noether 空間 $Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}})$ は 4 次元 K ベクトル空間となる. ここで, 偏微分作用素 T を

$$T = R_1 + R_0(-\frac{40}{191}x + \frac{144}{191}y)$$

で定めると,

$$Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}}) = \mathrm{Span}_K\{T, Tx, Ty, Tx^2\}$$

となり $\{T\}$ はホロノミック系 M の Noether 基底であることがわかる.

(iii) Z に台をもつデルタ関数 δ_Z を

$$\delta_Z = [\frac{18y^2 - 8x^2}{(xy-1)(4x^2 + 9y^2 - 36)}]$$

で定めると, 代数的局所コホモロジー類 σ_F は適当な Noether 作用素

$$S \in Hom_{D_X}(M,\ M_{\sqrt{I}})$$

により, $\sigma_F = S\delta_Z$ と表せることになる. ここで,

$$b(x,y) = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 \in K[x,y]/\sqrt{I}$$

を用いて $S = Tb$ とおき, 条件

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \cdot \sigma_F = 2\delta_Z$$

を満たす b を求める. 作用素の交換関係に注目して $D_X\sqrt{I}$ での計算をおこなうことで, $b(x,y) = \frac{1}{4608}x$ を得る. 従って, 代数的局所コホモロジー類 σ_F は,

$$\sigma_F = T(-\frac{1}{4608}x)\delta_Z$$

と Noether 作用素表示される.

References

[1] L. Ehrenpreis, Fourier Analysis in Several Complex Variables, Wiley-Interscience Publishers, 1970.

[2] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Third revised edition (1990), North Holland.

[3] M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems, Invent. math. **38** (1976), 33–53.

[4] H. M. Möller and H. J. Stetter, Multivariate polynomial equations with multiple zeros solved by matrix eigenproblems, Numer. Math. **70** (1995), 311–329.

[5] H.M. Möler and R. Tenberg, Multivariate polynomial system solving using intersections of eigenspaces, J. Symbolic Computation **32** (2001), 513–531.

[6] S. Tajima, Grothendieck duality and Hermite-Jacobi formula, in Lecture Notes in Pure and Applied Math. 214, eds by J. Kajiwara, Z. Li and K.H. Shon, Dekker (2000), 503–509.

[7] 田島慎一, 代数的局所コホモロジー類のローラン展開と L. Ehrenpreis の Noether 作用素, 京都大学数理解析研究所講究録 **1138** (2000), 87–95 .

[8] 田島慎一, 非同次常微分方程式の可解条件について II, 京都大学数理解析研究所講究録 **1295** (2002), 9–16.

[9] S. Tajima, Exponential polynomials and the Fourier-Borel transforms of algebraic local cohomology classes, in Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis, eds. by T. Kawai and K. Fujita, World Scientific. (2002), 284–296.

[10] 田島慎一, 零次元イデアルのネター作用素について, 京都大学数理解析研究所講究録掲載予定

[11] H. Tsai and U. Walther, Computing homomorphisms between holonomic D-modules, J. Symbolic Computation **32** (2001), 597–617.